締め切り，提出先等についての指示は最終ページにあります。ご覧下さい。

1　相関の検定

無相関検定 (有意水準 α**)** 帰無仮説 H_0: $\rho = 0$

$T := \sqrt{n-2}\dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}$: $t(n-2)$-分布　(または, $T^2 = (n-2)\dfrac{r^2}{1-r^2}$: $F(1, n-2)$-分布)

母相関検定 (有意水準 $1-\alpha$**,** $n > 10$**)** 帰無仮説 H_0: $\rho = \rho_0 \neq 0$

$T := \left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+r}{1-r} - \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)\Big/\sqrt{\dfrac{1}{n-3}}$: $N(0,1)$-分布　棄却域: $|T| > g(\alpha/2)$

例題: ある市の中学校で生徒 200 人について, 数学の成績順位と音楽の成績順位との相関係数を求めたところ, $r = 0.08$ であった。数学と音楽の成績順位の間に相関関係があるか。危険率 5% で検定せよ。 (坂他の教科書 p.64)

解答例: 仮説は「無相関」, $n = 200$, $r = 0.08$, $\alpha = 0.05$, $t_{198}(\alpha/2) = 1.972$ (統計表から)。棄却限界は $T^* = \sqrt{n-2}\dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}} = 1.129$ で棄却域に入らないので, 棄却できない。

例題: ある県の中学校 293 校について, 各学校の生徒数と学力テストの平均点との相関係数を求めたところ, $r = 0.63$ であった。学校の生徒数と学力テストの成績の間の母相関係数 $\rho = 0.60$ を危険率 5% で検定せよ。(宇野・水原の教科書 p.63)

解答例: 仮説 $\rho_0 = 0.60$, $n = 293$, $r = 0.63$, $\alpha = 1 - 0.05$, $g(\alpha/2) = 1.96$ (統計表から)。

$$T := \left(\frac{1}{2}\log\frac{1+0.60}{1-0.60} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)\Big/\sqrt{\frac{1}{293-3}} : N(0,1)\text{-分布}$$

$g(\alpha/2) = 1.96$, $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+0.60}{1-0.60} = 0.693147$ (using Fisher's z-transf). $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\rho}{1-\rho} = 0.693147 \pm \dfrac{1.96}{\sqrt{290}} = 0.5781..0.8082$. Using Fisher's z-transf reversely, $\rho_L = 0.5213$, $\rho_R = 0.6686$ で r は棄却域にないので, 棄却できない。

例題: 成人男子 100 人を任意に選んで身長と胸囲の相関係数を調べたところ $r = 0.28$ を得た。身長と胸囲の「無相関性」を有意水準 0.01 で検定せよ。

解答例: 棄却域は $(-\infty, -2.63) \cup (2.63, \infty)$ である。$r = 0.28$ は棄却域にあり仮説は棄てる。

HW1-1　ある高校で新入生 67 人を任意抽出して身長と体重の相関係数を計算したら, 0.73 であった。昨年までのデータによる身長と体重の相関係数は平均 0.64 である。今年の新入生の相関係数も従来通りと考えてよいか。有意水準 0.05 で検定せよ。cf.<< $T = 1.368 < 1.96$>>

HW1-2　ある大学の入試で, 84 人の受験生を無作為に抽出して, 英語と数学の得点 (2 次元正規分布に従うと考える) の相関係数を計算したら, 0.65 であった。母相関係数 ρ は, 0.5 以上である

と考えてよいか。有意水準 0.05 で検定せよ。cf.<< `T = 2.034 > 1.645 = g(0.05),` **棄却出来る**>>

2　一個の母集団

母集団の平均を μ, 分散を σ^2 なる記号で表し, 独立な m 個の標本 $X_1, \ldots, X_m$ に対し, 平均を $\bar{X}$ で, 分散を S^2 で表す。即ち, $\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X_j, \quad S^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(X_j - \bar{X})^2$

2.1　母平均 μ の検定

母平均 μ の検定		
正規母集団母分散 σ 既知の場合	$\frac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{m}}$	$\mathbf{N(0,1)}$
正規母集団母分散未知の場合	$\frac{X-\mu}{S/\sqrt{m-1}}$	$\mathbf{t(m-1)}$
一般母集団の場合	$\frac{X-\mu}{S/\sqrt{m-1}}$	$\mathbf{t(m-1)}$

概説: 母集団分布が正規分布のとき, あるいは母集団分布の型がわからなくとも概本が十分に大きいとき, 標本平均の分布は正規分布とみてよいから, 正規分布に関する知識を用いて, 母平均についての仮説を検定することができる。

ある大学では, 毎年新入生に英語のテストを行い, 一その緒果はいつもだいたい一定で, 平均点 70 点, 標準偏差 5 点であった。今年の新入生にも同一水準のテストを行ったが, 彼らの英語の学力水準が従来とくらべ変化しているかどうか早急に知りたい、このような場合には, 帰無仮説および対立仮説を, 新入生全体の平均を μ として次の形に設定し, 標本抽出を行って調べるとよい。

$$\begin{cases} H_0: \quad \mu = 70 & \text{新入生の学カ水準は従来と同じである。} \\ H_1: \quad \mu \neq 70 & \text{新入生の学力水準は従来と異なっている。} \end{cases}$$

いま, 大きさ 49 の無作為標本から標本平均 69 点を得たとしよう。今年の新入生全体についての標準偏差は従来と同じ 5 点であるとする。そのとき標本平均 X の分布は $N(70.5^2/49)$ に従い, したがって

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 70}{5/\sqrt{49}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。滅多に起こらない小さな確率 0.05 の範囲は $0.05 = P(|Z| \geq 1.96)$ から $|Z| \geq 1.96$ と決まる。この範囲 $|Z| \geq 1.96$ を危険率 (有意水準) 0.05 の棄却域と言い, もし Z の実現値 z が棄却域にある, 即ち $|z| \geq 1.96$ であれば帰無仮説 H_0 を捨てる。$|z| < 1.96$ なら H_0 は捨てられない, と判断する。標本平均 69 を代入して計算すれば $z = -1.4$ であるから, 上述の基準に照らして, H_0 は捨てられない。すなわち, 標本平均が従来の母平均より 1 点低いが, この程度の差は標本のとり方によっては偶然に起こり得るので, 新入生の水準が従来と異なっているとは言い切れないと考えるのである。

以下の問題では, 特に指定のない限り両側検定法で, また有意水準は 5% として解け。

HW2-1　$\overline{x}=63$, $\sigma=15$ のとき, 次の場合について, $H_0:\mu=60$ を検定せよ。

(1)$n=100$ の場合 (2)$n=25$ の場合

HW2-2　ある県で行われた数学の学力調査で, 平均値 73.5, 標準偏差 8.0 を得た。A 市の受験者のうち 100 名を抽出して, 平均点を調べたら 75.1 であった。A 市の受験者全体の平均点を μ とし, 仮説 $H_0:\mu=73.5$ を次のそれぞれの場合について検定せよ。

(1) $H_1:\mu\neq 73.5$ (A 市の学力水準は県全体のそれと異なる)

(2) $H_1:\mu>73.5$ (A 市の学力水準は県全体のそれより高い)

HW2-3　前問 HW2-2 を 1% 有意水準で解け。

2.2　母分散 σ^2 の検定

母分散 σ^2 の検定		
正規母集団で, 母平均 μ 既知の場合	$\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}(X_j-\mu)^2$	$\boldsymbol{\chi^2(m)}$
正規母集団で, 母平均未知の場合	$\dfrac{mS^2}{\sigma^2}$	$\boldsymbol{\chi^2(m-1)}$
一般母集団の場合	$\dfrac{mS^2}{\sigma^2}$	$\boldsymbol{\chi^2(m-1)}$

例題　ある機械の入った 40.0 オンスの小包の標準偏差は以前は 0.25 オンスであった。小包の任意標本 20 個の標準偏差は 0.32 オンスであった。これは, 有意水準 (a) 0.05, (b) 0.01 で, 明かな有意差 (有意な増加) があろうか。

解答例　仮説 $H_0:\sigma=0.25$, 対立仮説 $H_1:\sigma>0.25$ とする。

$T:=\dfrac{mS^2}{\sigma^2}:\chi^2(m-1)$ に, $\sigma=0.25$, $S=0.32$, $m=20$ を代入して $T^*=\dfrac{20(0.32)^2}{0.25^2}=32.8$ を得る。

(a) 有意水準 0.05 の片側検定では, 自由度 19 で, 棄却限界は 30.1 である。棄却域に入るので仮説 H_0 は棄却される。

(b) 有意水準 0.01 の片側検定では, 自由度 19 で, 棄却限界は 36.2 である。棄却域に入らないので仮説 H_0 は棄却できない。

HW2-4　ある会社で生産される電球の寿命の平均は過去において 1120 時間, 標準偏差 125 時間であった。

(i) 最近, 新しく生産された電球から 8 本の標本をとって調べたら, 平均寿命は 1070 時間で会った。平均寿命に変化はないとの仮説を有意水準 0.05 で検定せよ。

(ii) 最近, 新しく生産された電球から 20 本の標本をとって調べたら, 寿命の標準偏差は 150 時間を示した。これは異常であると結論を下せるか有意水準 0.01 で検定せよ。

3　二母集団

一個の母集団の平均を μ_1, 分散を ${\sigma_1}^2$, 独立な m 個の標本 $X_1, \ldots, X_m$ に対し, 平均を $\bar{X}$, 分散を ${S_X}^2$ と表し, 他の母集団の平均を μ_2, 分散を ${\sigma_2}^2$ なる記号で表し, そこからの独立な n 個の標本 $Y_1, \ldots, Y_n$ に対し, 平均を $\bar{Y}$, 分散を ${S_Y}^2$ と表し, 標本 $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ は独立であると仮定する。

3.1　等平均の検定

共に正規母集団で, 母分散既知の場合　$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{{\sigma_1}^2/m + {\sigma_2}^2/n}} : \mathbf{N(0,1)}$

共に正規母集団で, 母分散が等しい (値は不明) の場合

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(m{S_X}^2 + n{S_Y}^2)/(m+n-2)}} \times \sqrt{\frac{mn}{m+n}} : \mathbf{t(m+n-2)}$$

一般の母集団の等平均　$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{{S_X}^2/m + {S_Y}^2/n}} : \mathbf{N(0,1)}$

一般の母集団の「等出現率, 等比率」　同上

例題数学の小テストを行い, 男女別に次のようなデータが得られたとする。このテストの得点は男女とも正規分布に従い, 母分散は等しいと仮定する。この結果から男女の成績に有為の差があるか。

	標本数	平均	標準偏差
男	22	15	2.93
女	20	13	2.73

男子の母平均を μ_1, 女子の母平均を μ_2 として, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$,　5% 有意水準両側検定の棄却域は, 自由度 40 の時, $|T| \geq 2.02$ である。一方

$$T^* = \frac{15-13}{\sqrt{(22 \times 2.93^2 + 20 \times 2.73^2)/(22+20-2)}} \sqrt{\frac{22 \times 20}{22+20}} = 2.227$$

で棄却される。(1% なら棄却限界は 2.70 なので棄却できない。)

HW3-1　数学のテストを 2 回行った。第 1 回のテストの結果から 8 人, 第 2 回のテストの結果から第 1 回とは独立に 8 人抽出した所次のようになった。2 つのテストに難易度の差があるか。有意水準 5% で検定せよ。但し母分散は等しいとの仮定の下で。

第 1 回: 53, 64, 68, 49, 71, 62, 68, 85

第 2 回: 34, 48, 71, 50, 53, 44, 73, 75

HW3-2　2 つの独立な正規母集団からとった標本から次のデータを得た。母分散が等しいと仮定して「母平均が等しい」との帰無仮説を 5% 有意水準で検定せよ。

標本数	平均	不偏分散
10	21	25
12	25	30

3.2　共に正規母集団の等分散の検定

$$\frac{{S_X}^2/(1-1/m)}{{S_Y}^2/(1-1/n)} = \frac{{U_X}^2}{{U_Y}^2} : \mathbf{F(m-1, n-1)}$$

例題　2 つの同種のテスト A と B がその得点平均の上で有意差があるかどうかを知るために, 互いに独立な 14 名と 10 名の学生にそれぞれ A,B テストを実施したところ次の表のようになった。

	標本数	平均	分散
A	14	45.9	1353/14
B	10	52.2	2234/10

(1) A テストの方が難しかったと言えるか有意水準 5% で片側検定せよ。

(2) 等分散の検定を行え。

解答例: (1) 自由度 14+10-2 = 22 , $P(|t| > f) = 0.05 \Rightarrow f = 1.717$

$$T^* = \frac{45.9 - 52.2}{\sqrt{(1354 + 2234)/(14 + 10 - 2)}}\sqrt{\frac{14 \times 10}{14 + 10}} = -1.1916$$

棄却できない。

(2) $P(L < F_{13,9}) = 1 - 0.05/2 \Rightarrow L = 0.3019$, $P(R < F_{13,9}) = 0.05/2 \Rightarrow R = 3.8306$
$T^* = \dfrac{1353/(14-1)}{2234/(10-1)} = 0.41928$ 棄却できない。

W3-3 A 学科 と B 学科 に対し同一の試験を実施した。独立な標本を取り出した結果が次の表である。

	標本数	平均	分散
A	30	73	86
B	25	65	102

(1) A, B の得点のバラツキについて特に B 学科が大きいと言えるか有意水準 5% で片側検定せよ (等分散の検定)。
(2) 両学科の学生の成績に平均点の有意差が認められるか (両側 1 %)。

W3-4 以下の数値はテストを 2 回実施し, 第 1 回目のテストで 8 人, 第 2 回目のテストでは第 1 回目とは独立に 8 人抽出したものである。

（第 1 回） 49, 53, 62, 64, 68, 68, 71, 85
（第 2 回） 34, 44, 48, 50, 53, 71, 73, 75

(i) 上記テスト 1, 2 に難易度の差があるか, 有意水準 2% で検定せよ。(等平均の検定)

(ii) 上記テスト 1, 2 のばらつきに差があるか, 有意水準 5% で検定せよ。(等分散の検定)

以上, 公式のメモ, 例題, 宿題を列挙しました。宿題は 2 週間分で **HW1-1**, **HW1-2**, **HW2-1**, **HW2-2**, **HW2-3**, **HW2-4**, **HW3-1**, **HW3-2**, **HW3-3**, **HW3-4** です。締め切りは July 23(Friday) 13:00 提出先は工学 5 号館 (情報工学科)2 階のレポート箱 (三上) です。